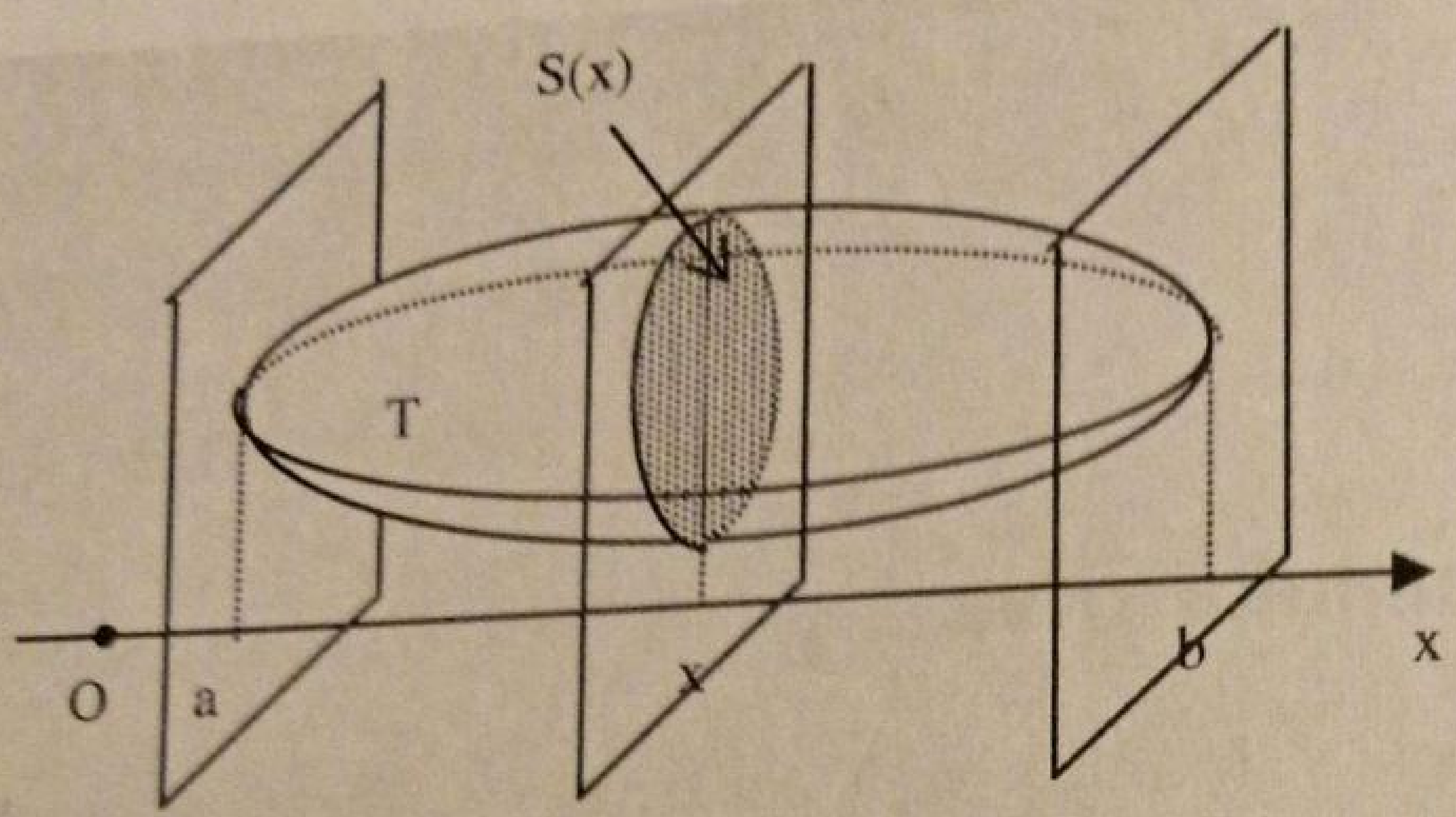
c) Izračunavanje zapremine tijela

Zapremina tijela sa poznatim površinama poprečnih presjeka. Neka je u prostoru zadato tijelo T (sl 9). Označimo sa S(x) površine poprečnih presjeka tijela T sa ravnima normalnim na osu Ox za $x\in[a,b]$ (sl 9). Zapremina dijela tijela T koji se nalazi između ravni x=a i x=b računa se po formuli

$$V=\int_a^b S(x)dx\,.$$

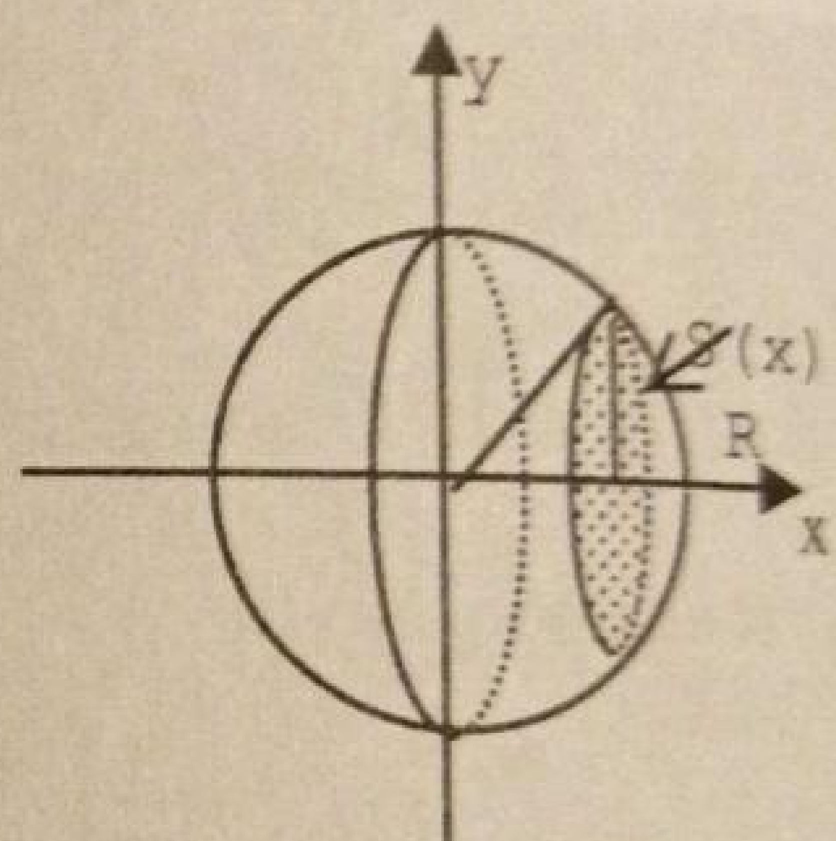


sl 9

Primjer 5. Izračunati površinu lopte poluprečnika R.

Rješenje. Presjek lopte sa ravni koja sadrži taku (x,0) i koja je normalna na osu Ox je kružnica poluprečnika r (sl 10) čija je površina S(x). Kako je $R^2=x^2+r^2$, to je $S(x)=(R^2-x^2)\pi$. Dalje je $V=\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=$

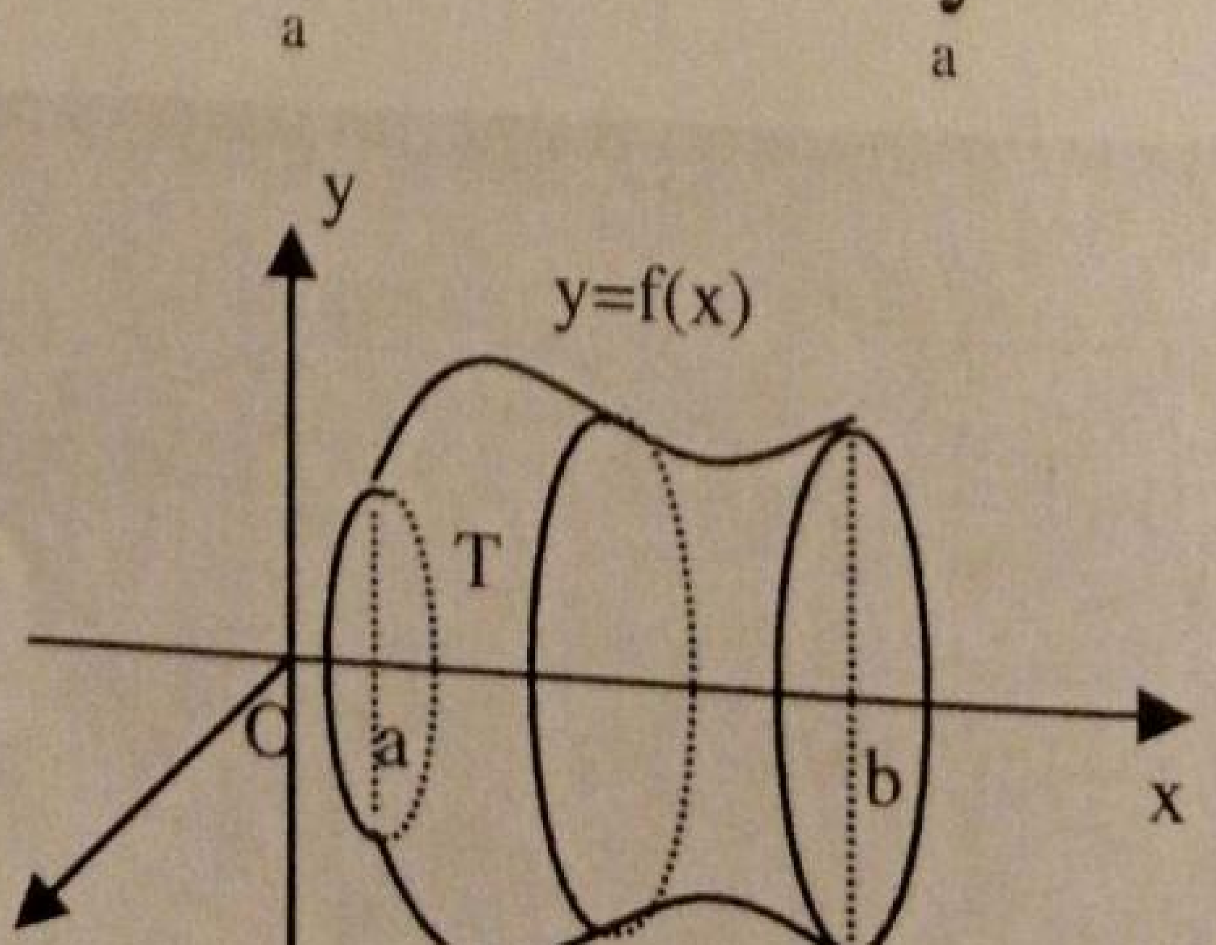
$$\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4\pi R^3}{3}.$$



sl 10

Zapremina rotacionog tijela. Neka tijelo T nastaje rotacijom oko ose Ox (Oy) krivolinijskog trapeza: y=f(x) (f(x)≥0), y=0, x=a, x=b (sl 11). Zapremina tijela T se računa po formuli

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx \quad (V_y=2\pi\int_a^b xydx\,,\ a\geq 0).$$



sl 11

Ako je kriva zadata u parametarskom obliku: x=x(t), y=y(t), t∈[α,β], tada se zapremina računa po formuli

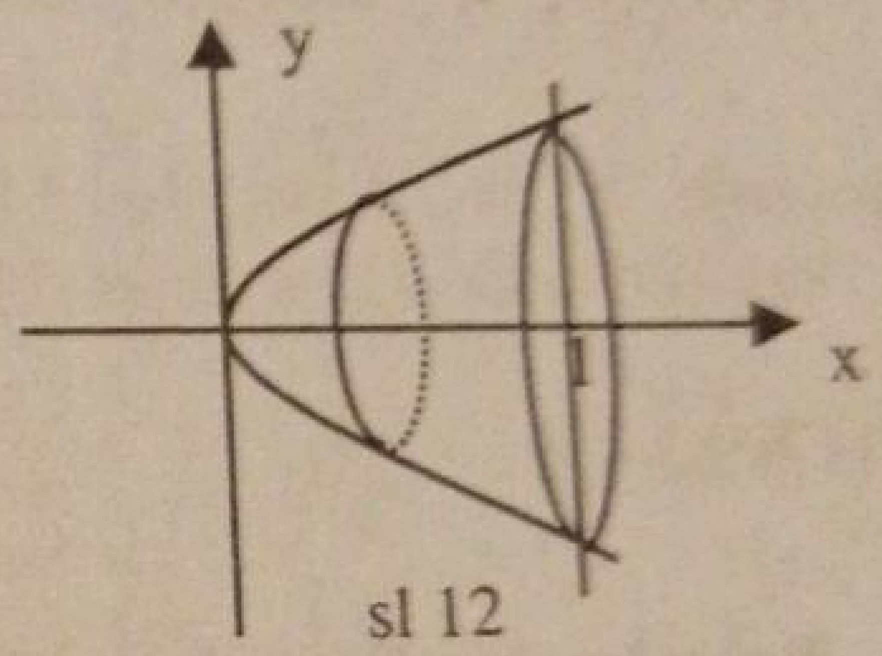
$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [y(t)]^2 x'(t)dt .$$

Ako tijelo T nastaje rotacijom, oko ose Oy, krivolinijskog trapeza: x=φ(y) (φ(y)≥0), x=0, y=c, y=d, tada se zaptremina tijela T računa po formuli

$$V_y = \pi \int_{a}^{b} x^2 dy .$$

Primjer 6. Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom oko ose Ox figure $y^2 = 4x$, y=0, x=1.

Rješenje. $V_x = \pi \int_0^1 4x dx = 2\pi$.



sl 12

d) Izračunavanje površine rotacionih tijela

- Ako luk krive y=f(x), a≤x≤b rotira oko ose Ox, tada se površina površi koja tako nastaje računa po formuli

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx ,$$

gdje su a i b apscise početka i kraja luka.

- Ako luk krive x=φ(y), c≤y≤d rotira oko ose Oy, tada se površina površi koja tako nastaje računa po formuli

$$S_y = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy ,$$

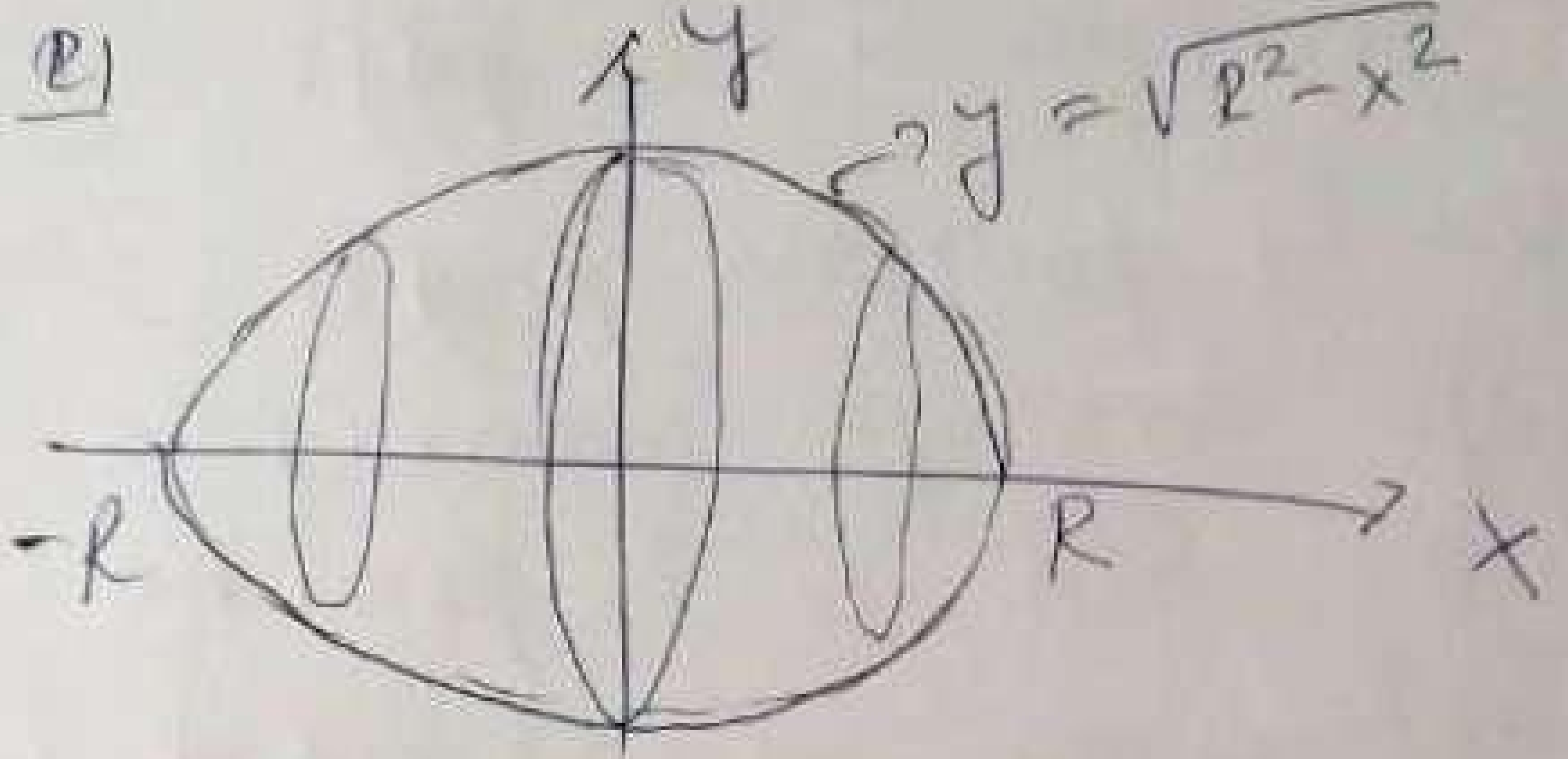
gdje su c i d apscise početka i kraja luka.

- Ako je kriva zadata parametarskim jednačinama x=x(t), y=y(t), α≤t≤β, tada se površina površi koja nastaje rotacijom luka krive oko ose Ox računa po formuli

$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt .$$

Primjer 7: Izračunati površinu lopte poluprečnika R.

R)



Neka je $x^2+y^2=R^2$ jednačina kružnice. Oko ose Ox rotira polukružnica $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Kako je $y'=\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}$ to je:

$$P_x=2\pi\int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx$$

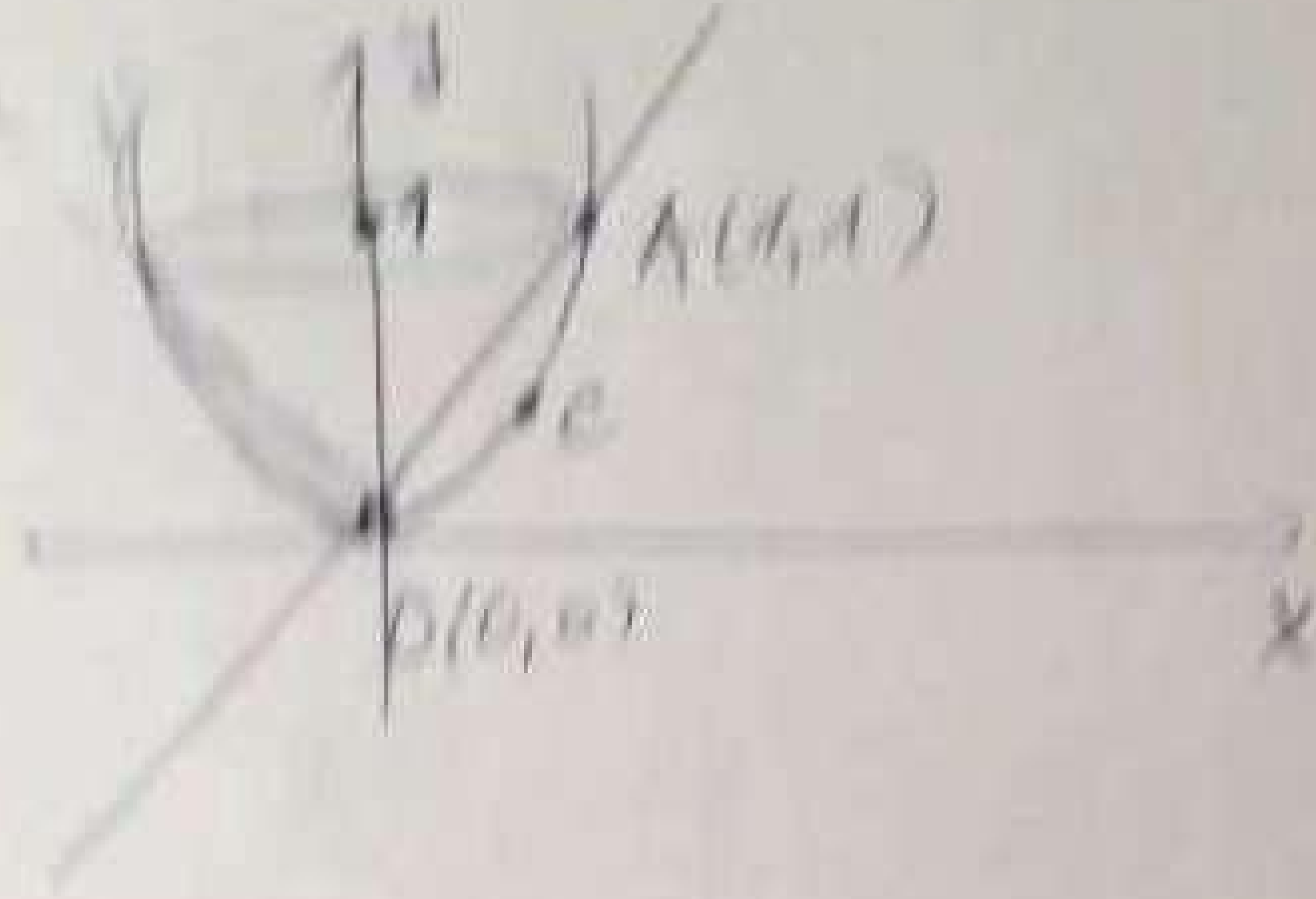
$$=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=2\pi R\left(x\Big|_{-R}^{R}\right)=4\pi R^2.$$

Primjer 8: Naći površinu površi koja nastaje rotacijom oko ose Oy zatvorene konture koje obrazuju krive $y=x^2$ i $y=x$.

R) Iz sistema $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$ dobijamo $\begin{cases} y=x \\ x=x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=0 \vee x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Dakle presječne tačke prave $y=x$ i parabole $y=x^2$ su $O(0,0)$ i $A(1,1)$.



Tražena površina biće jednaka zbiru površina P_1 i P_2 gdje je P_1 površina površi koja nastaje rotacijom luka $\overset{\frown}{OCA}$, a P_2 površina površi koja nastaje rotacijom duži OA oko Oy.

Odredićemo P_1. Iz $y = x^2$ dobijamo da je jednačina luka $\overset{\frown}{OCA}$: $x = \sqrt{y}$, $(0 \le y \le 1)$.

$$P_1 = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x'^2}\,dy \underset{\substack{x=\sqrt{y}\\ x'=\frac{1}{2\sqrt{y}}}}{=} 2\pi \int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{y}\,\frac{\sqrt{4y+1}}{2\sqrt{y}}\,dy = \pi \int_0^1 \sqrt{4y+1}\,dy = \left[\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{4y+1=t} \\ \multicolumn{3}{c}{dy=\frac{1}{4}dt} \\ y & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Odredićemo P_2. Iz $y = x$ dobijamo:

$$P_2 = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x'^2}\,dy \underset{\substack{x=y\\ x'_y=1}}{=} 2\pi \int_0^1 y\sqrt{2}\,dy =$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) = \pi\sqrt{2}.$$